

Olimpiada de Matematică
Etapa locală, Neamț
11.02.2023
Barem de notare și evaluare
Clasa a V-a

Subiectul 1

Fie $a = 8 \cdot 3^{n+2} \cdot 25^{n+1}$ și $b = 7 \cdot 5^{n+2} \cdot 15^{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Comparați numerele a și b .

b) Arătați că numerele a și b dau același rest prin împărțirea cu 165, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

Soluție:

a) $a = 8 \cdot 3^{n+2} \cdot 25^{n+1} = 8 \cdot 3^{n+1} \cdot 3 \cdot 25^{n+1} = 75^{n+1} \cdot 24$ 1 punct

$b = 7 \cdot 5^{n+2} \cdot 15^{n+1} = 7 \cdot 5^{n+1} \cdot 5 \cdot 15^{n+1} = 75^{n+1} \cdot 35$ 1 punct

Deci, $a < b$ 1 punct

b) $a = 75^{n+1} \cdot 24 = 75^{n+1} \cdot (22 + 2) = 75^{n+1} \cdot 22 + 75^{n+1} \cdot 2$

$b = 75^{n+1} \cdot 35 = 75^{n+1} \cdot (33 + 2) = 75^{n+1} \cdot 33 + 75^{n+1} \cdot 2$ 2 puncte

Cum $75^{n+1} \cdot 22 : 165$ și $75^{n+1} \cdot 33 : 165$, restul împărțirii lui a la 165 este același cu restul împărțirii lui b la 165, respectiv restul împărțirii lui $75^{n+1} \cdot 2$ la 1652 puncte

Subiectul 2

Arătați că numărul 10^n se poate scrie ca o sumă de două pătrate perfecte, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

Soluție:

Dacă $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, atunci avem: $10^{2k} = 10^{2k-2+2} = 10^{2k-2} \cdot 10^2 = 10^{2k-2} \cdot (6^2 + 8^2) =$
 $= 10^{2k-2} \cdot 6^2 + 10^{2k-2} \cdot 8^2 = 10^{2(k-1)} \cdot 6^2 + 10^{2(k-1)} \cdot 8^2 = (10^{k-1} \cdot 6)^2 + (10^{k-1} \cdot 8)^2$. (1)... 3p

Dacă $n = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}$, atunci avem: $10^{2k+1} = 10^{2k} \cdot 10 = 10^{2k} \cdot (1^2 + 3^2) =$
 $= 10^{2k} \cdot 1^2 + 10^{2k} \cdot 3^2 = (10^k \cdot 1)^2 + (10^k \cdot 3)^2$. (2).....3 p

Din (1) și (2) rezultă că 10^n se poate scrie ca o sumă de două pătrate perfecte, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$ 1p

Subiectul 3

Determinați numerele prime a și b pentru care numerele $a + b$ și $a + 2b$ sunt prime.

Soluție:

Dacă a și b au aceeași paritate rezultă $a + b$ par și deci $a + b$ nu este prim deoarece $a + b > 2$ - imposibil1 punct

Deducem că a și b au parități diferite. Astfel:

a) dacă a este par rezultă că $a = 2$ (a - prim) și avem ca $a + 2b = 2 + 2b = 2(1 + b)$ nu este prim deoarece $1 + b > 2$ - imposibil 2 puncte

b) dacă b este par rezulta ca $b = 2(b - \text{prim})$. Problema se reduce la determinarea unui nr. prim a astfel încât $a + 2$ și $a + 4$ să fie prime. Se observă că $a = 3$ satisface condițiile..... 2 puncte

Se demonstrează că $a = 3$ este unica soluție ($a = 5$ nu este soluție a problemei iar pt $a > 5$ nr primele pot avea forma $6k + 1$ sau $6k + 5$ și nu satisfac condițiile problemei)... 2 puncte

Subiectul 4

Cel mai vechi teatru din România a fost construit în orașul Oravița din județul Caraș-Severin și a fost inaugurat în anul 1817. După un număr de ani reprezentat de un număr N de două cifre egale, la Reșița (Caraș-Severin) a fost construită prima locomotivă cu aburi fabricată în România; după un alt număr de ani, reprezentat de un număr M de două cifre egale ($M > N$), la Lupeni (Hunedoara) a început construcția primei fabrici de mătase artificială din România. Adunând acum un alt număr P (de ani) cu aceeași proprietate și $P > M$, obținem anul 2015. În ce an a fost construită prima locomotivă cu aburi din România, știind că aceasta s-a întâmplat după adoptarea primei constituții a țării?

Soluție:

Fie $N = \overline{aa}$.

Anul când a fost construită prima locomotivă din Reșița: $1817 + \overline{aa}$ 0,5puncte

$M = \overline{bb}$, $a < b$. Anul când a început construcția primei fabrici de mătase artificială la Lupeni: $1817 + \overline{aa} + \overline{bb}$ 0,5puncte

$P = \overline{cc}$, $b < c$.

Deci $1817 + \overline{aa} + \overline{bb} + \overline{cc} = 2015$0,5puncte

Rezultă $\overline{aa} + \overline{bb} + \overline{cc} = 198$0,5puncte

$10a + a + 10b + b + 10c + c = 198$0,5puncte

$11a + 11b + 11c = 198$0,5puncte

$11(a + b + c) = 198$ 0,5puncte

$a + b + c = 18$ 0,5puncte

Din $a < b < c$, deci $a + a + a < a + b + c$, rezultă $3a < 18$, deci $a < 6$0,5puncte

Prima constituție a fost adoptată în anul 1866.

$1817 + \overline{aa} > 1866$, rezultă $\overline{aa} > 49$, deci $a \geq 5$1punct

Din $a > 6$ și $a \geq 5$ se obține $a = 5$ 0,5punct

Anul în care a fost construită prima locomotivă cu aburi din România:

$1817 + 55 = 1872$ 1punct